ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Session de 1983
Concours d'admission
Mathématiques

1re épreuve - Durée : 4 heures

Coefficient 4

Voie générale

PROBLÈME 1

A Pour tout couple de réels (a_1, b_1), on considère la fonction φ_1 définie sur l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs par

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \forall x > 0, \quad \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \operatorname{Ln} x) \end{cases}$$

1) On suppose dans cette question $a_1 = -b_1 = 1$

a) Montrer que la fonction φ_1 correspondante est continue sur $\mathbb{R}^+$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$? Déterminer la fonction dérivée φ_1' et la limite de cette fonction quand x tend vers 0 par valeurs positives.

b) Etudier les variations de φ_1. Construire sa courbe représentative (C_1) dans un repère orthonormé.

c) Montrer que la fonction φ_2

$$x \to \varphi_2(x) = \int_0^x \varphi_1(t)\,dt$$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Calculer $\varphi_2(x)$. (On trouvera, pour x non nul,

$$\varphi_2(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2 \operatorname{Ln} x)).$$

Construire la courbe représentative (C_2) de φ_2 dans le même repère que (C_1).

2) On suppose maintenant a_1 et b_1 réels quelconques.

a) Etudier brièvement la continuité et la dérivabilité de la fonction φ_1 associée :

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \forall x > 0, \quad \varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \operatorname{Ln} x). \end{cases}$$

b) Montrer que l'on peut définir sur l'ensemble des entiers naturels non nuls une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$\varphi_1(0) = 0$; $\forall x > 0$, $\varphi_1(x) = x(a_1 + b_1 \operatorname{Ln} x)$

$\forall n > 1$, $\forall x \geq 0$, $\varphi_n(x) = \int_0^x \varphi_{n-1}(t)\,dt$

Vérifier qu'il existe deux suites $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ $n \in \mathbb{N}^*$ telles que

$\forall x > 0$, $\varphi_n(x) = x^n(a_n + b_n \operatorname{Ln} x)$.

Former des relations de récurrence concernant les couples (a_n, b_n) et (a_{n+1}, b_{n+1}).

Etudier la suite b.

On pose pour tout entier naturel n non nul, $t_n = n! a_n$.

Former une relation de récurrence satisfaite par t_n et t_{n+1}.

Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall n \geq 1, \quad |t_n| \leq A + B \operatorname{Ln} n.$$

(On pourra montrer que, $\forall n$, entier naturel supérieur strictement à 1, on a

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \operatorname{Ln} n)$$

Etudier alors la convergence de la suite a.

B > A tout couple (a,b) de réels, à tout entier naturel non nul p, on associe l'application Φ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

.../...

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \forall x > \rho, \quad \varphi(x) = x^{\rho}(a + b \operatorname{Ln} x) \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note E_p l'ensemble décrit par φ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.

1°) Montrer que, si p est différent de 1, E_p est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

Examiner le cas de $p = 1$

On supposera dans la suite du problème $p \neq 1$

2°) Montrer que les éléments de E_p, notés u et v, obtenus respectivement en donnant à (a, b) les valeurs (1, 0) et (0, 1) forment une base de E_p.

3°) Soit f l'application qui, à tout élément φ de E_p, associe la fonction numérique $f(\varphi)$, notée g, définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = x.\varphi'(x)$.

Démontrer que f est un endomorphisme de E_p. Déterminer la matrice de f dans la base (u, v). L'application f est-elle un automorphisme de E_p ?

4°) k étant un réel donné, on appelle F_k l'ensemble des éléments φ de E_p tel que $f(\varphi) = k.\varphi$. Déterminer F_k et discuter suivant les valeurs de k.

5°) Démontrer qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que, pour tout élément φ de E_p,

$(f \circ f)(\varphi) + \lambda f(\varphi) + \mu.\varphi$ soit l'application nulle.

PROBLÈME 2

Soit f une fonction réelle définie, continue, positive, décroissante sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs. Pour chaque entier $n \geq 1$ on pose :

$$u_n = \sum_{p=1}^{p=n} f(p) \text{ et } I_n = \int_1^n f(t).dt$$

1°) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\int_n^{n+1} f(t).dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t).dt.$$

2°) Démontrer qu'il existe des nombres réels positifs a et b tels que pour tout entier $n \geq 2$ on ait :

$I_{n+1} - a \leq u_n - b \leq I_n$.

En déduire que les suites (u_n) et (I_n) convergent ou bien divergent en même temps.

3°) Démontrer que la suite $(v_n) = (u_n - I_n)$ est décroissante et convergente et que sa limite k vérifie les inégalités : $0 \leq k \leq f(1)$. Lorsque la suite (I_n) est convergente démontrer que l'on a les inégalités :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n \leq \lim_{n \to +\infty} u_n \leq f(1) + \lim_{n \to +\infty} I_n.$$

4°) Pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies pour tout nombre réel $x > 0$ par :

$f_1(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ α réel strictement plus grand que 1.

$f_3(x) = e^{-\beta x}$ β nombre réel strictement positif

$$f_4(x) = \frac{1}{[x + x(\operatorname{Ln} x)^2]}$$

a) Calculer I_n pour $n \geq 1$

b) Déterminer si la suite (I_n) est divergente ou convergente

c) Dans le cas où la suite (u_n) est convergente, trouver un encadrement de sa limite.